Lösung zur Übung 1 vom 14.10.2014

Aufgabe 1

Berechnen Sie $\cot(\alpha+\beta)$ als Funktion der Einzelfunktionen $\cot(\alpha)$ und $\cot(\beta)$.

Lösungsweg 1

Es ist ein Additionstheorem für den Kotangens zu finden. Es wird damit begonnen, den Kotangens als Kombination von Sinus und Kosinus darzustellen.

$$\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} \tag{1}$$

In blau bzw. rot sind die Additionstheoreme des Kosinus bzw. Sinus hervorgehoben.

$$= \frac{\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)}{\sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)} \qquad \Big| \cdot \frac{\frac{1}{\sin(\alpha)\sin(\beta)}}{\frac{1}{\sin(\alpha)\sin(\beta)}} \tag{2}$$

Durch geschicktes Erweitern mit dem Kehrwert des rechten Zählerterms, erhält man nun

$$= \frac{\cot(\alpha)\cot(\beta) - 1}{\cot(\beta) + \cot(\alpha)} \tag{3}$$

Lösungsweg 2

Dies ist der gleiche Lösungsweg, nur noch einmal in Einzelschritten dargestellt. Der erste Schritt ist in schon im ersten Lösungsweg dargestellt (vgl. Gl. 1 & 2)

$$\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)}{\sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)} \qquad \Big| \cdot \frac{\frac{1}{\sin(\beta)}}{\frac{1}{\sin(\beta)}} \tag{4}$$

$$= \frac{\cos(\alpha)\cot(\beta) - \sin(\alpha)}{\sin(\alpha)\cot(\beta) + \cos(\alpha)} \qquad \Big| \cdot \frac{\frac{1}{\sin(\alpha)}}{\frac{1}{\sin(\alpha)}} \tag{5}$$

$$= \frac{\cot(\alpha)\cot(\beta) - 1}{\cot(\beta) + \cot(\alpha)} \tag{6}$$

$$\tag{7}$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Werte von $\sin(15°)$ und $\sin(75°)$ über passende Additionstheoreme.

Werte der Sinus und Kosinus-Funktion für ausgewählte Winkel

Bei der Berechnung der Aufgabe soll kein Taschenrechner verwendet werden, daher ist es nützlich einige in Naturwissenschaft und Technik wichtige Winkel sowie deren Sinus- und Kosinuswerte zu kennen.

Tabelle 1: Werte der Sinus und Kosinus-Funktion für ausgewählte Winkel

Winkel	Sinus	Kosinus
$0°$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$30°$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$
$90°$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

Lösung für $\sin(15°)$

Mithilfe von Tabelle 1 und unter Verwendung der Additionstheoreme des Sinus lassen sich weitere Werte berechnen. In der ersten Aufgabe soll der $\sin(15°)$ bestimmt werden.

$$\sin(15°) = \sin(45° - 30°) \tag{8}$$

Anwendung des Additionstheorems des Sinus

$$\sin(45° - 30°) = \sin(45°) \cdot \cos(30°) - \sin(30°) \cdot \cos(45°) \tag{9}$$

Diese Winkel sind bekannt (siehe Tab.1).

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{1}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{10}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \tag{11}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\sqrt{6} - \sqrt{2}\right] \tag{12}$$

Dieser Ausdruck muss nicht weiter vereinfacht werden!!!

Lösung für $\sin(75°)$

$$\sin(75°) = \sin(45° + 30°) \tag{13}$$

Vorgehensweise wie oben.

$$\sin(45° + 30°) = \sin(45°) \cdot \cos(30°) + \sin(30°) \cdot \cos(45°) \tag{14}$$

Diese Winkel sind bekannt (siehe Tab.1).

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{1}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{15}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \tag{16}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\sqrt{6} + \sqrt{2}\right] \tag{17}$$

Dieser Ausdruck muss nicht weiter vereinfacht werden!!!

Aufgabe 3

Zeigen Sie unter Verwendung der Additionstheoreme:

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Zunächst wird substituiert:

$$\alpha = x + y \tag{18}$$
$$\beta = x - y \tag{19}$$
$$\Rightarrow$$
$$\alpha + \beta = 2x \tag{20}$$
$$\alpha - \beta = 2y \tag{21}$$

Nun setzt man die Ergebnisse aus Gl. 18 und Gl. 19 in die Ausgangsgleichung ein und erhält:

$$\begin{aligned} \cos(x+y) + \cos(x-y) &= \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y) \\ &\quad + \cos(x) \cdot \cos(y) + \sin(x) \cdot \sin(y) \end{aligned} \tag{22}$$
$$= 2 \cdot \cos(x) \cdot \cos(y) \tag{23}$$

Nun substituiert man mit Gl. 18 und Gl. 19 zurück:

$$= 2 \cdot \cos(\frac{\alpha+\beta}{2}) \cdot \cos(\frac{\alpha-\beta}{2}) \tag{24}$$

Aufgabe 4

Der Tangens des halben Winkels α kann dazu verwendet werden, verschiedene trigonometrische Funktionen durch rationale Ausdrücke zu beschreiben. Man zeige, dass mit $t = \tan(\alpha/2)$ gilt:

a)

$$\sin(\alpha) = \frac{2t}{1+t^2}$$

Lösung

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha) &= \frac{2t}{1+t^2} && (25)\\
&= \frac{2\tan(\frac{\alpha}{2})}{1+\tan^2(\frac{\alpha}{2})} && (26)\\
&= \frac{2\tan(\frac{\alpha}{2})}{\frac{1}{\cos^2(\frac{\alpha}{2})}} && (27)\\
&= 2\tan(\frac{\alpha}{2}) \cdot \cos^2(\frac{\alpha}{2}) && (28)\\
&= 2\sin(\frac{\alpha}{2}) \cdot \cos(\frac{\alpha}{2}) = \sin(\alpha) && (29)
\end{aligned}$$

Dies entspricht dem Additionstheorem des Sinus.

b)

$$\cos(\alpha) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Lösung

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha) &= \frac{1-t^2}{1+t^2} && (30)\\
&= \frac{1-\tan^2(\alpha/2)}{1+\tan^2(\alpha/2)} && (31)\\
&= \frac{1-\tan^2(\alpha/2)}{\frac{1}{\cos^2(\frac{\alpha}{2})}} && (32)\\
&= 1-\tan^2(\alpha/2) \cdot \cos^2(\frac{\alpha}{2}) && (33)\\
&= \cos^2(\frac{\alpha}{2}) - \cos^2(\frac{\alpha}{2}) \cdot \tan^2(\alpha/2) && (34)\\
&= \cos^2(\frac{\alpha}{2}) - \cos^2(\frac{\alpha}{2}) \cdot \frac{\sin^2(\alpha/2)}{\cos^2(\alpha/2)} && (35)\\
&= \cos^2(\frac{\alpha}{2}) - \sin^2(\frac{\alpha}{2}) = \cos(\alpha) && (36)
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis entspricht dem Additionstheorem des Kosinus.

c)

$$\tan(\alpha) = \frac{2t}{1-t^2}$$

Lösung

$$\begin{aligned}
\tan(\alpha) &= \frac{2\tan(\frac{\alpha}{2})}{1-\tan^2(\frac{\alpha}{2})} && (37)\\
&= \frac{2\tan(\frac{\alpha}{2})}{1-\frac{\sin^2(\frac{\alpha}{2})}{\cos^2(\frac{\alpha}{2})}} && (38)\\
&= \frac{2\tan(\frac{\alpha}{2})\cos^2(\frac{\alpha}{2})}{\cos^2(\frac{\alpha}{2})-\sin^2(\frac{\alpha}{2})} && (39)\\
&= \frac{2\sin(\frac{\alpha}{2})\cos(\frac{\alpha}{2})}{\cos^2(\frac{\alpha}{2})-\sin^2(\frac{\alpha}{2})} && (40)\\
&= \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha) && (41)
\end{aligned}$$